Шифр: 11-05

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Сосновый Бор

Школа МБОУ Лицей №8

Класс 11

ФИО Чигарев Андрей Сергеевич

11-05 Лист 1/4

1	2	3	4	5	Σ
7	~~0~~ 4	0	0	0	~~7~~ 11

11.1.

Обратим внимание на множители числа 77:

$77 = -1 \cdot (-77)$ $\qquad$ $77 = 1 \cdot 77$

$77 = -7 \cdot (-11)$ $\qquad$ $77 = 7 \cdot 11$

Другие разложения недопустимы по условию.

Рассмотрим все варианты:

1) Наименьшие числа -1 и -77, наибольшие 1 и 77. (n_1)

Очевидно, что $n_1 < n_2$, где наименьшие числа -1 и -77, а наибольшие 11 и 7, т.к. (n_2) отрезок от -1 до 7 длиннее отрезка от -1 до 1.

2) Наименьшие числа -7 и -11, наибольшие 1 и 77. (n_3)

Очевидно, что $n_1 < n_2 = n_3 < n_4$, ~~т.к. длина~~ когда наименьшие числа -7 и -11, а наибольшие 7 и 11, т.к. длина отрезка от -7 до 7 больше длины отрезка от -7 до 1.

$\Rightarrow$ n будет наибольшим при наименьших числах -7 и -11, и наибольших 7 и 11.

Запишем эти n чисел:

$-11, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11$

⇒ Условия выполняются при ~~наибольшем~~ n, равном 17. Если n будет увеличиваться далее, то появятся числа, произведение которых не будет равно 77.
Ответ: 17.

11.2.

Если множество A и множество B состоят из n различных натуральных чисел с суммой n^2, значит, среднее значение элементов множества A равно среднему значению элементов множества B и равно n.

~~1) Рассмотрим случай, когда n четно.~~
Так как все числа различны, появление в одном множестве двух элементов, равных n, невозможно.

$$n = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n}, \text{ где } A_i \in A \text{ и } A_i = n - a_i; \quad a_i \in Z.$$

Аналогично и с b_i.
~~Очевидно, что, чтобы a_i оставались натуральными~~ ⇒ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_i = 0$
где a_i и b_i – „отклонения" элементов множеств ~~a и b~~ A и B соответственно от n, причём
$a_i > -n$ и $b_i > -n$, и $b_i \neq a_i$.
Очевидно, что при таком раскладе максимальное количество отрицательных чисел среди a_i и b_i равно $n - 1$.
⇒ Минимальное кол-во неотрицательных

равно $n+1$.

Пусть одно из них ноль.

$\Rightarrow$ Кол-во положительных чисел – n.

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i + \sum_{i=1}^{i=n} b_i = 0$$

$\Rightarrow$ Сумма всех отрицательных чисел от ~~нуля~~ $-n+1$ до -1 должна быть равна сумме первых n положительных чисел, чтобы условие выполнялось.

Но сумма первых n положительных чисел больше суммы первых $n-1$ отрицательных чисел на n, т.е. наше предположение неверно, и могут быть такие a_i и b_i, что $a_i = b_i$.

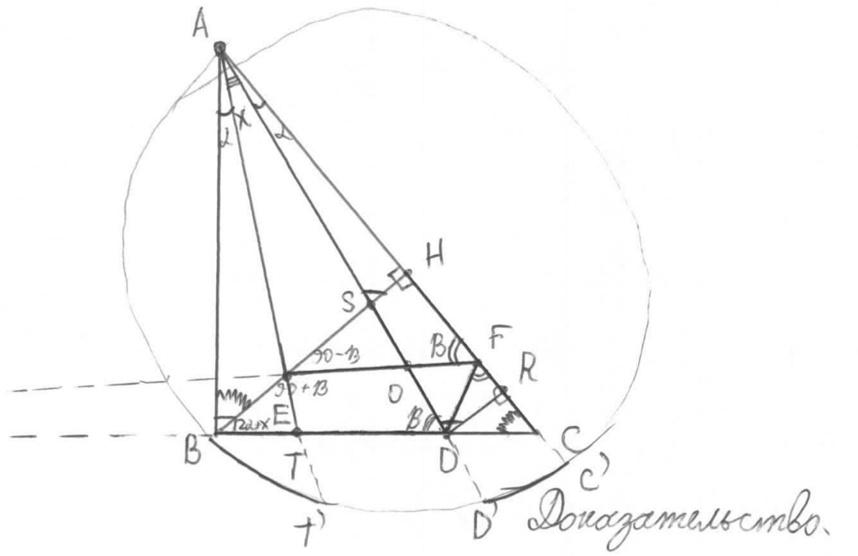
Приведём пример: $n = 5$

A	B
$A_1 = 5-1$	$B_1 = 5-3$
$A_2 = 5-2$	$B_2 = 5-4$
$A_3 = 5+1$	$B_3 = 5+3$
$A_4 = 5+2$	$B_4 = 5+4$
$A_5 = 5$	

И, так как более отрицательных чисел, не участвовавших в решении, не осталось, то $B_5 = 5 = A_5$.

Ч.т.д.

11.3.



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle B = 90°$.

$BH \perp AC$

$D \in BC$

$E \in BH$

$F \in CH$

$\angle BAD = \angle CAE$

$\angle AFE = \angle CFD$

Док-ть, что:

$\angle AEF = 90°$

Доказательство.

Из условия, $\angle CAD = \angle BAE$.

Пусть $\angle EAD = x$, $\angle BAE = \alpha$, $\angle EFH = \beta$.

$\angle ABH = \angle DRCR = 90° - 2\alpha - x$

$\angle ASH = \angle ADR$, т.к. $BH \parallel DR$.

$\angle ADR + \alpha = 90°$

$\triangle BSD$: $180° = \angle ASH + \angle SDB + \underline{90° - 90°} + 2\alpha + x$

$\angle SDB = 90° - \alpha - x$

OFRD: $\angle DOF = 360° - 180° + \beta - 90° - 90° + \alpha = \beta + \alpha$

$\Rightarrow \angle AOE = \angle DOF$ как верт. углы

$\angle AOE = \beta + \alpha$

$\Rightarrow AEF = 180° - \beta - \alpha - x$.

~~EDDB:~~ $\cancel{\angle ASE = 90° + \alpha}$ $\cancel{\Rightarrow \angle AES = 90° - \alpha - x}$

$\cancel{\Rightarrow AEB = 90° + \alpha + x}$ $\cancel{\angle BET = 90° - \alpha - x}$

$\cancel{\angle BTE: 90° - \alpha}$. $\cancel{\angle ETD = 90° + \alpha}$

$\cancel{\triangle ADB: \alpha + x + \angle SDB = 90°}$

~~Продлим FE и DB до пересечения в точке K.~~

11.3.

~~Опишем около окружность с центром в точке H и радиусом BH.~~

~~Т.к. $\angle BAD = \angle CAT$, то~~

~~$\smile BD = \smile CT \Rightarrow \smile BT = \smile DC$~~

Опишем около ΔAEF окружность.

Опишем около ΔABD окружность.

$\Rightarrow$ $\angle EAH$ опирается на хорду EH, как и $\angle EFH$.

$\angle BAS$ опирается на хорду BS, как и $\angle SDB$,

где хорды EH и BS лежат на одной прямой.

$\Rightarrow \angle SDB = \beta$

$\Rightarrow \angle SDB + \alpha + x = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AEF = 90^\circ$

ч.т.д.

11.4.

p - простое, $p > 3$.

$y < \frac{p}{2}$; $y \leq \frac{p-1}{2}$

$py + 1 \neq A \cdot B$, где $A > y$ и $B > y$.

$A = y + a$ $\quad B = y + b$ $\quad a \in N$, $b \in N$.

$x \in Z$

$y = \frac{p-1}{2} - x$

$\frac{p-3}{2} \geq x \geq 1$

$\Rightarrow p = 2y + 2x + 1$

$\Rightarrow$

$$2y^2+(2x+1)y+1 \neq (y+a)(y+b)$$

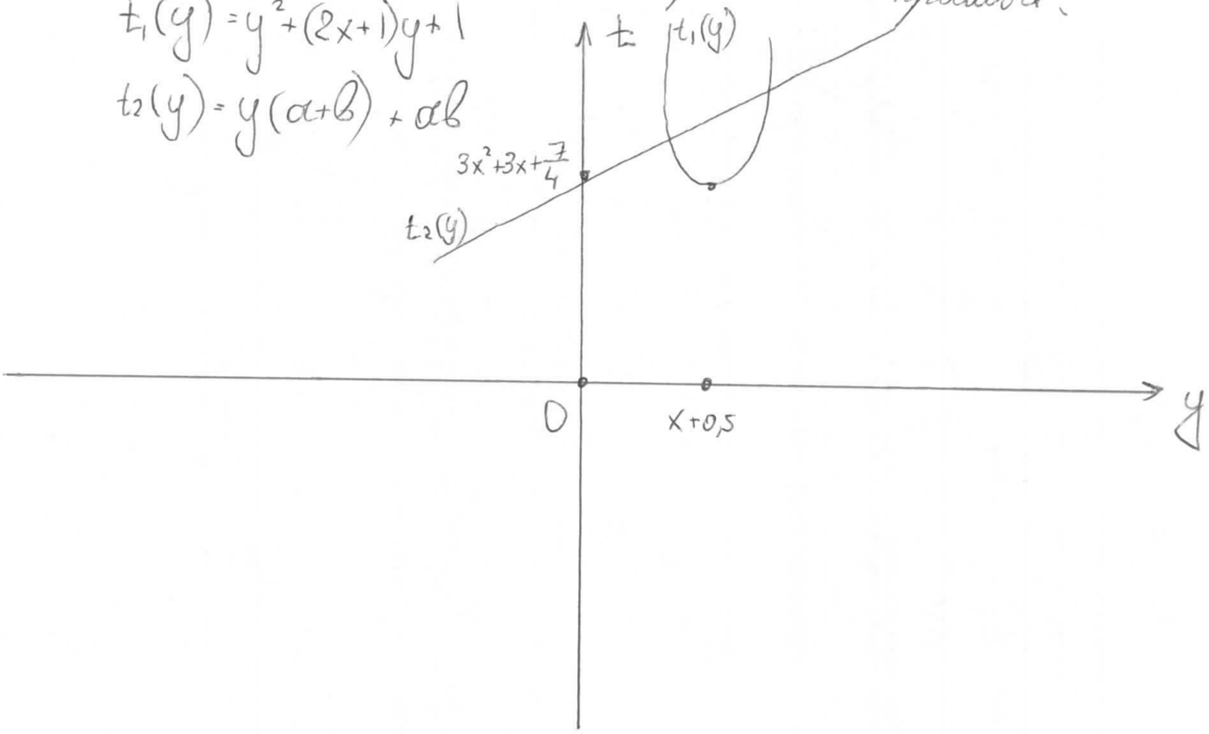
$$y^2+(2x+1)y+1 \neq y(a+b)+ab$$

Слева у нас функция от y, график которой является параболой; справа – прямой.

$\forall a,b$

$t_1(y)=y^2+(2x+1)y+1$

$t_2(y)=y(a+b)+ab$



$\Rightarrow$ У прямой и параболы не более двух точек пересечения. Осталось проверить, существуют ли значения y кроме ~~коорди~~ тех, при которых прямая и парабола пересекаются.

При простых числах $\geqslant 7$ значений $y \geqslant 3$. $\Rightarrow$ Хотя бы одно y найдётся всегда.

Проверим для $p=5$.

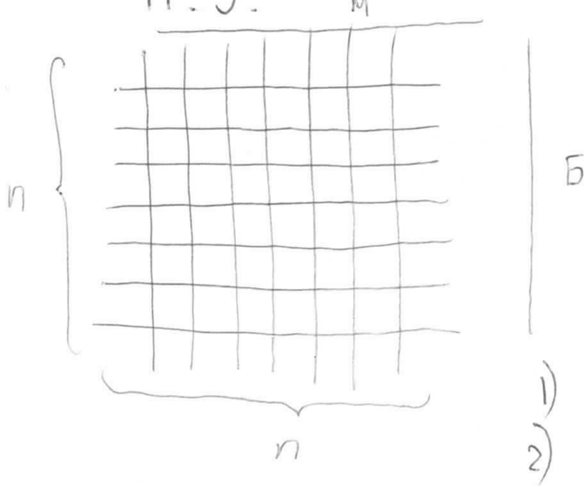
$y_1=1$ $\quad$ $y_2=2$

$py_1+1=6$ $\quad$ $py_2+1=11$ — простое число.

$A\cdot B=2\cdot 3$ $\quad$ $A\cdot B=11\cdot 1$

Найдётся $\Rightarrow$ Такое число y найдется всегда. ч.т.д.

11.5.



Условие минимума суммы всех „больших" чисел — последовательное заполнение таблицы вида

1) 1 2 3 4 ... n

2) n+1 .... 2n,

....

так как все большие числа, ближайшие к числу в последней клетке строки считаться не будут.

Условие максимума суммы всех „малых" чисел — заполнение таблицы вида

1)	2)
1	n+1
2	...
3	...
...	...
n	2n

....

Максимум суммы „малых чисел" равен $n^2 + (n \cdot 1 + (n-1)n)$

Минимум ~~Максимум~~ суммы „больших чисел" равен $\frac{n+1}{2}n^2$, максимум „малых" — $n + \frac{n^2}{2}(n-1)$.

То есть их разность равна $n^2 - n$ ~~нулю~~. Но достижимо ли это?

⇒ Расстановка, ~~максимально~~ удовлетворяющая одному из наших условий, является оптимальной, так как их совместное выполнение невозможно.

1 2 3 4 ..... n

~~2 3 4~~

n+1 ...... 2n

$$S_б = \frac{n^3 + n^2}{2}$$

$$S_м = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\Rightarrow S_б - S_м = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}$$

Ответ: $\frac{n(n-1)(n+1)}{2}$.

1

Шифр: 2-11-26

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Сосновый Бор

Школа МБОУ Лицей №8

Класс 11

ФИО Чигарев Андрей Сергеевич

Лист 1/6

6	7	8	9	10	Σ
7	0	0	0	X	7

2-11-26

11.6.

$\overset{(1)}{x+1}$, $x^2\overset{(2)}{+}1$, $x^3\overset{(3)}{+}1$, $x^4\overset{(4)}{+}1$

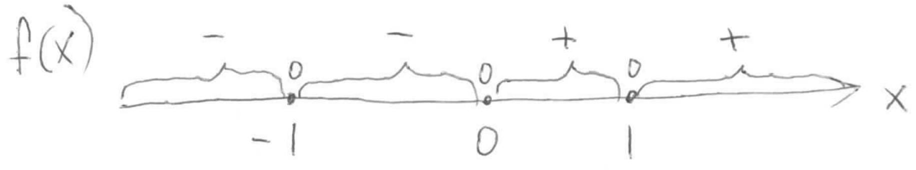
Очевидно, что нам необходимо получить функцию, у которой степень множителя x будет нечётной, а степени множителей вида $x-a$, где $a \in \mathbb{Z}$, будут чётными; ~~оно и~~ это нужно для того, чтобы при переходе через точку $x=0$ знак ф-ции менялся. ~~и она принимала значение 0 и на при положи~~

(3) − (1): $x(x-1)(x+1)$

(4) − (2): $x^2(x-1)(x+1)$

Перемножим:

$x^3(x-1)^2(x+1)^2$ – искомая функция:



Функция ненулевая, и при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента принимает неположительные значения.

$\Rightarrow$ Это требуемая функция.

~~11.9.~~

~~Если три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, значит, каждая из них касается двух других.~~

11.7.

Пусть число $n_1 = 2^k - \alpha$ $(k \in N)$ раскрашено в один цвет.

Очевидно, что числа, дающие в сумме с ним 2^x, где $x \in N$, находятся в другой группе (т.е. покрашены в другой цвет).

Т.к. числа натуральны, то $\alpha < 2^k$.

1

$\cdot\ 2^k - \alpha$

2

$\cdot\ \alpha$ (1)

$\cdot\ 2^k + \alpha$ (2)

$\cdot\ 3 \cdot 2^k + \alpha$ (3)

$\cdot\ 7 \cdot 2^k + \alpha$ (4)

Предположим, что (1) + (2) = 2^x

$$2(2^{k-1} + \alpha) = 2^x$$

$$\Rightarrow \alpha = 2^{k-1}$$

Но тогда $2^k - \alpha = \alpha$, и потому ~~(1) + (2) ≠ 2^x~~ $2^k - \alpha = \alpha$, а числа не могут повторяться.

Предположим, что (2) + (3) = 2^x

$$\Rightarrow \quad 2(2^{k+1}+\alpha)=2^x$$

$$\Rightarrow \alpha = 2^{k+1}, \text{ но } \quad \alpha < 2^k$$

$\Rightarrow$ Такого не может быть.

Т.е. числа во второй группе при сложении любых двух из них дают сумму, не равную двойке, возведенной в какую-либо степень.

Докажем аналогично и для числа n_2, отличного от n_1, где $n_2 = 2^k \mp b$.

$\Rightarrow$ Т.к. α и b различны, то

$2^k-\alpha$	2^k-b
2^k+b	$2^k+\alpha$
$3\cdot 2^k+b$	$3\cdot 2^k+\alpha$
...	...

Условию будет удовлетворять такое разбиение. Каждое последующее число n_i можно будет представить в виде 2^k-c_i и занести в тот столбец, при сложении с числами которого не будет получена степень двойки.

(под столбцами подразумеваются две группы разного цвета).

$\Rightarrow$ Такая раскраска возможна.

Ответ: да.

11.8.

$\sin x + \cos y = \frac{p_1}{q_1}$, где $p_1 \in \mathbb{Z}$, $q_1 \in N$.

$\cos x + \sin y = \frac{p_2}{q_2}$, где $p_2 \in \mathbb{Z}$, $q_2 \in N$.

Сумма двух чисел рациональна, если они:

- оба рациональны
- ~~оба~~ вида $a - c$ и $b + c$, где

a и b - рациональные числа, а c - некоторое иррациональное число.

- Если $\sin x$ и $\cos x$ рациональны, то

~~m кратно~~ $\sin x = \frac{p_3}{q_3}$ $\cos x = \frac{p_4}{q_4}$,

причём они оба неотрицательны одновременно, т.к. иначе $|\sin y| > |\cos x|$ и $|\cos y| > |\sin x|$,

т.е. $\sin^2 y + \cos^2 y > 1$, что невозможно.

$\Rightarrow$ Можно подобрать такие m и n, кратные q_3 и q_4 соответственно, чтобы

$\frac{m}{q_3} p_3 + \frac{n}{q_4} p_4 > 0$.

- Если $\sin x$ рационален, а $\cos x$ - иррационален, или наоборот, то: $\sin x = \frac{p_3}{q_3}$, $\cos x = a + c$, где $a \in \mathbb{Q}$, $c \notin \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x \neq 1$, т.е.

такого случая не может быть.

- ~~Если $\sin x$ и $\cos x$ иррациональны.~~

~~$\sin x = b - c$, $\cos x = a + c$, где $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, c \notin \mathbb{Q}$.~~

11.8 (прод)

~~Что требуемые~~

- Если $\sin x$ и $\cos y$ иррациональны:
(или $\cos x$ и $\sin y$ иррациональны)
$\sin x = b - c$, $\cos y = a + c$, $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$, $c \notin \mathbb{Q}$.

$\cos x$ и $\sin y$ тоже иррациональны:

$|\cos x| = \sqrt{1-(b-c)^2}$ $\quad |\sin y| = \sqrt{1-(a+c)^2}$

А сумма ~~??~~ иррациональных чисел равна нулю тогда, когда они противоположны.

$$\Rightarrow 1-(a+c)^2 = 1-(b-c)^2$$
$$(a+c)^2 = (b-c)^2$$
$$a^2 + ac = b^2 - bc$$
$$(a-b)(a+b) = -(b+a)c$$

$\Rightarrow$ Или $a = -b$, или $c = b - a$, что невозможно.

$\Rightarrow a = -b$, т.е.

$\sin x + \cos x = 0$, что противоречит условию.

$\Rightarrow$ Мы перебрали все случаи, и в каждом из них, не противоречащем условию, нашлись такие числа m и n, что

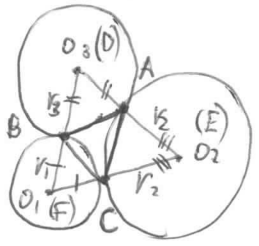
$m \sin x + n \cos x$ — натуральное число.

ч.т.д.

11.9.

Изобразим ~~все~~ проекции на плоскость, проходящую через центры всех трех сфер.

В



Очевидно, что $\alpha \cap \beta$, т.к. все три сферы касаются α.

$\Rightarrow$ $DE > O_3O_2$, $FE > O_1O_2$, $FD > O_1O_3$.

$\Rightarrow$ Если мы докажем требуемое для данного рисунка, то докажем все случаи.

ΔBO_3A, ΔAO_2C, ΔCO_1B равнобедренные.

Т.к. $r_2 > r_3 > r_1$, то

$$AC > \frac{1}{2} O_3O_1 > \frac{1}{2}(r_1 + r_3)$$

и $AC < r_1 + r_3$

$$\Rightarrow R_{O_1O_2O_3} = \frac{r_1 + r_3}{2\sin\angle O_3O_2O_1}$$

$$R_{ABC} = \frac{AC}{2\sin\angle O_3O_2O_1}$$

Это следствие из теоремы синусов.

$$\Rightarrow R_{ABC} < R_{O_1O_2O_3}.$$

ч.т.д.